Finance : aspects mathématiques et numériques

TD 10

On suppose que $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T \leq T_\infty)$ est la filtration naturelle d'un $\mathbb{P}^*$-mouvement Brownien $\widetilde{W}$. On suppose, de plus, que $\mathbb{P}^*$ fait de tous les prix de zéro-coupons actualisés, au taux instantané $(r_t, 0 \leq t \leq T_\infty)$, des martingales.

1 Autour du modèle BGM

Dans le modèle BGM (Brace-Gatarek-Musiela), on modélise directement les forwards Libor sous leur probabilité naturelle. Plus précisément, pour un échéancier $0 < T_0 < T_1 < \cdots < T_N$ (on supposera que $T_i - T_{i-1} = \delta > 0 \; \forall 0 \leq N$ [1]), on suppose que :

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \; dL_t\left(T_i, T_{i+1}\right) = L_t(T_i, T_{i+1}) \lambda^{T_i}(t) dW_t^{i+1} \tag{1}$$

avec $\left(\lambda^{T_i}(\cdot)\right)_{0 \leq i \leq N-1}$ des fonctions déterministes bornées et, $\forall 1 \leq i \leq N, \; (W_t^i)_{0 \leq t \leq T_\infty}$ est un mouvement Brownien sous la probabilité T_i- forward $\mathbb{P}^{T_i}$.

1. Rappeler l'expression du taux Libor forward en fonction des Zéro-Coupons et justifier l'absence de terme en « dt » dans (1).
2. Montrer que le prix du caplet de maturité T_{i+1} et de strike K, c'est-à-dire l'option qui promet $\delta(L_{T_i}(T_i, T_{i+1}) - K)_+$ en T_{i+1} vaut
$$C_t = \delta P(t, T_{i+1}) Black\left(t, L_t(T_i, T_{i+1}), \sqrt{\frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} (\lambda^{T_i}(s))^2 ds}, K, T_i\right)$$
où $Black(t, x, \sigma, K, T) = x\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-)$ avec $d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$.
3. On sait (pourquoi ?) que, pour tout T, il existe un processus adapté σ_t^T tel que
$$dP(t, T) = P(t, T)\left(r_t dt + \sigma_t^T d\widetilde{W}_t\right).$$
Quelle est, pour $i \in \{0, \cdots, N-1\}$, l'équation différentielle stochastique vérifiée par $\left(\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})}\right)_{t \geq 0}$ sous $\mathbb{P}^*$? sous $\mathbb{P}^{T_{i+1}}$? (cf TD précédent).
4. En déduire que $\lambda^{T_i}(t) = \frac{1+\delta L_t(T_i, T_{i+1})}{\delta L_t(T_i, T_{i+1})}\left(\sigma_t^{T_i} - \sigma_t^{T_{i+1}}\right)$.
5. On suppose que $\sigma_t^T = 0$ si $t \leq T < t + \delta$. Montrer que
$$\sigma_t^{T_i} = -\sum_{k=1}^{j(t,T_i)} \frac{\delta L_t(T_i - k\delta, T_{i+1} - k\delta)}{1 + \delta L_t(T_i - k\delta, T_{i+1} - k\delta)} \lambda^{T_i - k\delta}(t)$$
où l'indice $j(t, T_i)$ vérifie $t \leq T_i - j(t, T_i)\delta < t + \delta$. On voit que dans le modèle BGM, les volatilités des ZC sont aléatoires.

1. Par convention, $T_{-1} = 0$

6. Un swap receveur[2] est un produit qui offre à son détenteur, à chaque date T_i pour $1 \leq i \leq N$, la réception d'un flux fixe $c\delta$ contre le paiement d'un flux variable $\delta L_{T_i-\delta}(T_i-\delta, T_i)$. Montrer que la valeur en $t < T_0$ de ce produit vaut

$$\pi_t = \sum_{i=1}^{N} c\delta P(t, T_i) - (P(t, T_0) - P(t, T_N))$$

7. La version « *in-arrears* » de ce swap fonctionne de la même façon sauf que, au lieu de payer le Libor qui fixe en début de période on paie le Libor qui fixe en fin de période. Montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{T_i}}\left[L_{T_i}(T_i, T_i+\delta) \mid \mathcal{F}_t\right] = L_t(T_i, T_i+\delta)\left(1 + \frac{\delta}{L_t(T_i, T_i+\delta)}\frac{Var_t^{\mathbb{P}^{T_i+\delta}}\left(L_{T_i}(T_i, T_i+\delta)\right)}{1+\delta L_t(T_i, T_i+\delta)}\right)$$

avec $Var_t^{\mathbb{P}^{T_i+\delta}}\left(L_{T_i}(T_i, T_i+\delta)\right) = L_t^2(T_i, T_i+\delta)\left(e^{\int_t^{T_i}\left(\lambda_s^{T_i}\right)^2 ds} - 1\right)$.

8. En déduire la valeur du swap « *in-arrears* » en $t < T_0$.
9. Dans la pratique, il est important d'écrire toutes les équations qui gouvernent les différents taux Libor sous une même probabilité, par exemple la probabilité terminale $\mathbb{P}^{T_N}$.
Soit $1 \leq i \leq N-1$. Spécifier le changement de probabilité pour passer de $\mathbb{P}^{T_{i+1}}$ à $\mathbb{P}^{T_i}$. En déduire l'EDS vérifiée par $L_t(T_i, T_{i+1})$ sous $\mathbb{P}^{T_i}$.
10. En déduire le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par tous les Libor sous $\mathbb{P}^{T_N}$.
11. On considère la stratégie qui, partant d'une richesse initiale égale à 1, consiste à tout réinvestir dans le ZC de la date suivante à chaque date de l'échéancier. Montrer que la valeur de cette stratégie vaut

$$B(t) = P(t, T_{q(t)}) \prod_{k=0}^{q(t)-1} \left(1 + \delta L_{T_k}(T_k, T_{k+1})\right)$$

où l'indice $q(t) = \inf\{0 \leq n \leq N;\ T_n > t\}$.

12. Vérifier que $(B(t))_{0 \leq t}$ définit bien un numéraire. On note $\mathbb{P}^S$ la probabilité qui fait que pour tout actif Y, son prix exprimé en numéraire B, $\left(Y_t^B = \frac{Y_t}{B(t)}\right)_{0 \leq t \leq T_\infty}$, est une martingale sous $\mathbb{P}^S$. On appelle cette probabilité "probabilité spot".
13. Soit $0 \leq n \leq N-1$. Montrer que

$$dL_t(T_n, T_{n+1}) = L_t(T_n, T_{n+1})\lambda^{T_n}(t)\left(dW_t^B + \sum_{j=q(t)}^{n} \frac{\delta L_t(T_j, T_{j+1})\lambda^{T_j}(t)}{1+\delta L_t(T_j, T_{j+1})}dt\right)$$

où W^B est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^S$.

14. Verifier que la structure du drift sous $\mathbb{P}^S$ est plus simple que sous $\mathbb{P}^{T_N}$ pour un Libor en début de période. En fonction du produit ou de la méthode numérique, on privilégiera en pratique un numeraire ou l'autre.

2. Dans un swap payeur, l'investisseur paie le flux fixe et reçoit le flux variable