

Finance : aspects mathématiques et numériques

TD 9

On suppose que $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T \leq T_\infty)$ est la filtration naturelle d'un \mathbb{P}^* -mouvement Brownien \widetilde{W} . On suppose, de plus, que \mathbb{P}^* fait de tous les prix de zéro-coupons actualisés, au taux instantané $(r_t, 0 \leq t \leq T_\infty)$, des martingales.

1 Pricing d'option sur ZC dans le modèle de Ho-Lee

Dans cet exercice, on suppose que le processus de volatilité du zéro-coupon d'échéance T , $(\sigma_t^T, 0 \leq t \leq T \leq T_\infty)$ est déterministe et borné. $P(t, T)$ est (donc) solution de l'équation :

$$dP(t, T) = P(t, T) \left(r_t dt + \sigma_t^T d\widetilde{W}_t \right).$$

1. Montrer que, pour $t \leq \theta$, $P^\theta(t, T) = P(t, T)/P(t, \theta)$, le prix θ -forward du zéro-coupon d'échéance T est solution de :

$$dP^\theta(t, T) = P^\theta(t, T) \left(\sigma_t^T - \sigma_t^\theta \right) \left(d\widetilde{W}_t - \sigma_t^\theta dt \right).$$

Identifier une probabilité \mathbb{P}^θ sous laquelle $W_t^\theta = \widetilde{W}_t - \int_0^t \sigma_s^\theta ds$ est un mouvement Brownien pour $0 \leq t \leq \theta$.

2. Montrer que le prix θ -forward du call de maturité θ et de strike K sur le zéro-coupon d'échéance $T > \theta$, $C_t^\theta = C_t/P(t, \theta)$, est donné par

$$C_t^\theta = \mathbb{E}^\theta \left[(P(\theta, T) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^\theta \left[(P^\theta(\theta, T) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right].$$

3. Montrer que $C_t^\theta = B(t, P^\theta(t, T))$ où

$$B(t, x) = \mathbb{E} \left[\left(x e^{\sqrt{v_t^{\theta, T}} G - \frac{1}{2} v_t^{\theta, T}} - K \right)_+ \right]$$

où G est une gaussienne centrée réduite et $v_t^{\theta, T} = \int_t^\theta (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2 ds$.

4. En déduire que

$$B(t, x) = xN(d_+(t, x)) - KN(d_-(t, x)),$$

$$\text{où } d_\pm(t, x) = \frac{\ln(\frac{x}{K})}{\sqrt{v_t^{\theta, T}}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{v_t^{\theta, T}}$$

5. On note $H_t^T = N(d_+(t, P^\theta(t, T)))$ et $H_t^\theta = -KN(d_-(t, P^\theta(t, T)))$. Montrer que

$$C_t = H_t^T P(t, T) + H_t^\theta P(t, \theta)$$

et que $C_\theta = (P(\theta, T) - K)_+$. Quelle propriété reste-t-il à vérifier pour s'assurer que le portefeuille composé, à l'instant t , de H_t^θ de zéro-coupon d'échéance θ et H_t^T de zéro-coupon d'échéance T est un portefeuille de couverture ?

6. Montrer que pour $0 \leq t \leq \theta$, $dC_t^\theta = \frac{\partial B}{\partial x}(t, P^\theta(t, T))dP^\theta(t, T)$ et que

$$\frac{\partial B}{\partial x}(t, x) = N(d_+(t, x)).$$

7. En déduire que $dC_t = H_t^T dP(t, T) + H_t^\theta dP(t, \theta)$. Identifier un portefeuille de couverture pour le call.

8. Dans le modèle de Ho-Lee, la dynamique du taux court est modélisée par $dr_t = \phi(t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t$ pour une fonction du temps $\phi(t)$ et $\sigma > 0$. Quelle est la loi de r_t ? de $\int_t^T r_s ds$? Montrer que, dans le modèle de Ho-Lee, la volatilité du zéro-coupon est déterministe et vaut

$$\sigma_t^T = -\sigma(T - t).$$

9. En déduire la valeur du call et la composition d'un portefeuille de couverture dans le modèle de Ho-Lee.

2 Le cadre Heath-Jarrow-Morton

On définit les taux forward instantanés $f(t, T)$ par $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u)du}$, c'est-à-dire par $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T)$. $f(t, T)$ représente la valeur du taux court en T vu de t , c'est-à-dire comme anticipé par le marché à la date t . Le taux court en t vaut $r_t \stackrel{\text{def}}{=} f(t, t)$. Heath, Jarrow et Morton ont proposé (1992) d'écrire une dynamique non pas sur le taux court, mais sur l'ensemble des taux forward instantanés $f(t, T)$:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)d\widetilde{W}_t.$$

Pour chaque maturité T , $\alpha(\cdot, T)$ et $\beta(\cdot, T)$ sont des processus continus adaptés. Les différents taux d'intérêt, donc les différents taux forward instantanés, sont liés par l'absence d'opportunité d'arbitrage : ils ne peuvent bouger indépendamment les uns des autres, sous peine de créer des arbitrages.

Le but de cet exercice est de préciser ces liens.

1. Soit $X_t = -\int_t^T f(t, u)du$. Montre que

$$dX_t = \left(f(t, t) - \int_t^T \alpha(t, u)du \right) dt - \left(\int_t^T \beta(t, u)du \right) d\widetilde{W}_t.$$

2. En déduire que

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \left(f(t, t) - \int_t^T \alpha(t, u)du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \beta(t, u)du \right)^2 \right) dt - \left(\int_t^T \beta(t, u)du \right) d\widetilde{W}_t.$$

3. Montrer que, par absence d'opportunité d'arbitrage,

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, u)du.$$

Le drift sous \mathbb{P}^* du taux forward instantané $f(t, T)$ est donc entièrement déterminé par les volatilités $\beta(t, u)$ des taux forward instantanés $f(t, u)$, $t \leq u \leq T$. Le modèle, et donc les prix d'options, sont entièrement déterminés par la donnée de la volatilité $\beta(t, T)$, par exemple $\beta(t, T) = \sigma(f(t, T))$ pour une fonction σ lipschitzienne bornée (cette condition assure l'existence et l'unicité d'une solution $f(t, T)$).