Calcul stochastique et finance

Examen du 10 juin 2026 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Couverture partielle

On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

Pour $0 < K < L < \infty$, on s'intéresse à une option européenne d'échéance T et de payoff $\varphi_L(S_T)$ où $\varphi_L(x) = (x-K)^+ 1_{\{x\leq L\}}$ (Call up and out).

1. Exprimer le prix V_t de l'option en $t \in [0,T]$ sous forme d'une espérance conditionnelle.
2. Montrer que $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction $v(t,x)$ que l'on précisera.
3. Rappeler (sans démonstration) l'équation aux dérivées partielles satisfaites par la fonction v.
4. Calculer $d(e^{-rt}v(t,S_t))$ et en déduire que $(e^{-rt}v(t,S_t))_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.
5. Vérifier que $\varphi_L(x) = (x-K)^+ - (x-L)^+ - (L-K)1_{\{x>L\}}$.
6. Soit $t \in [0,T[$. Pour $x, \ell > 0$, on pose $d_1(x,\ell) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big(\ln(x/\ell) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big)$ et $d_2(x,\ell) = d_1(x,\ell) - \sigma\sqrt{T-t}$. Vérifier que $\mathbb{E}^*[1_{\{S_T>L\}}|\mathcal{F}_t] = \mathcal{N}(d_2(S_t,L))$ où $\mathcal{N}(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$. Calculer $\frac{d}{dx}\mathcal{N}(d_2(x,L))$ puis exprimer à l'aide des fonctions d_1 et d_2 la quantité d'actif risqué à détenir à l'instant t dans le portefeuille de couverture. Quelle est la quantité d'actif sans risque à détenir en t ?

On considère maintenant une option européenne d'échéance T et de payoff H $\mathcal{F}_T$ mesurable tel que $\mathbb{P}(H \geq 0) = 1$, $\mathbb{P}(H > 0) > 0$ et $\mathbb{E}^*[H^2] < \infty$. Afin de diminuer le coût de la couverture, on se donne un facteur $\beta \in]0,1]$ et on cherche à maximiser la probabilité $\mathbb{P}(V_T(\beta) \geq H)$ de surcouverture parmi les stratégies admissibles de valeur initiale $V_0(\beta) \leq \beta\mathbb{E}^*[e^{-rT}H]$ dont on note $V_t(\beta)$ la valeur en $t \in [0,T]$.

7. Montrer que pour une telle stratégie, $\mathbb{E}^*[H 1_{\{V_T(\beta)\geq H\}}] \leq \beta\mathbb{E}^*[H]$.
8. Justifier que l'on peut définir une probabilité $\mathbb{Q}$ par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{H}{\mathbb{E}^*(H)}$.

Pour $\alpha \geq 0$, on pose $A_\alpha = \left\{\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^*} \geq \alpha\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*}\right\}$.

9. Vérifier que pour $A \in \mathcal{F}$, $1_{A_\alpha} - 1_A = 1_{A_\alpha\cap A^c} - 1_{A\cap A_\alpha^c}$. En déduire le signe de $\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^*} - \alpha\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*}\right)(1_{A_\alpha} - 1_A)$ puis que $\mathbb{Q}(A_\alpha) \geq \mathbb{Q}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A_\alpha) \geq \mathbb{P}(A)$.
10. On suppose que $\alpha_\star \geq 0$ est tel que $\mathbb{E}^*\left[H 1_{A_{\alpha_\star}}\right] = \beta\mathbb{E}^*\left[H\right]$.

(a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathbb{E}^*\left[H 1_A\right] \leq \beta \mathbb{E}^*\left[H\right]$, $\mathbb{P}(A_{\alpha_\star}) \geq \mathbb{P}(A)$.

(b) En déduire que $\mathbb{P}(V_T(\beta) \geq H) \leq \mathbb{P}(A_{\alpha_\star})$ pour toute stratégie admissible de valeur initiale $V_0(\beta) \leq \beta \mathbb{E}^*[e^{-rT}H]$.

(c) Soit $V_t^{\alpha_\star}$ la valeur en $t \in [0,T]$ de l'option européenne d'échéance T et de payoff $H 1_{A_{\alpha_\star}}$. Vérifier que $A_{\alpha_\star} \subset \{V_T^{\alpha_\star} \geq H\}$ et calculer $V_0^{\alpha_\star}$. En déduire que $\mathbb{P}(V_T^{\alpha_\star} \geq H) = \mathbb{P}(A_{\alpha_\star})$.

(d) Conclure que le portefeuille de couverture de cette option maximise la probabilité de surcouverture sous la contrainte de budget.

11. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $f(\alpha) = \frac{\mathbb{E}^*[H 1_{A_\alpha}]}{\mathbb{E}^*[H]}$.

    (a) Pour $\alpha > 0$, vérifier que $1_{A_\alpha} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} \leq \frac{1_{A_\alpha}}{\alpha} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^*}$ et en déduire que $f(\alpha) \leq \frac{\mathbb{P}(A_\alpha)}{\alpha}$. Que vaut $\lim_{\alpha \to +\infty} f(\alpha)$? Et $f(0)$?

    (b) Vérifier que pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} 1_A]$ et en déduire que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*}$.

    (c) Vérifier que pour $\alpha > 0$, $f(\alpha) = \mathbb{Q}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\alpha}\right)$. Lorsque $\mathbb{P}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\alpha}\right) = 0$ pour tout $\alpha > 0$, montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et en déduire l'existence de $\alpha_\star \in [0, +\infty[$ tel que $\mathbb{E}^*\left[H 1_{A_{\alpha_\star}}\right] = \beta \mathbb{E}^*\left[H\right]$.

12. On pose $\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$. Vérifier que $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{S_T^{-\gamma}}{\mathbb{E}[S_T^{-\gamma}]}$ et en déduire que $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{S_T^\gamma}{\mathbb{E}^*[S_T^\gamma]}$.

13. Vérifier que $S_t^\gamma = s_0^\gamma \exp(\gamma \sigma W_t + \gamma(r - \frac{\sigma^2}{2})t)$. En déduire que $\mathbb{E}^*[S_t^\gamma] = s_0^\gamma e^{\gamma(r + (\gamma-1)\frac{\sigma^2}{2})t}$. Quelle équation différentielle stochastique dirigée par le mouvement brownien $(W_t)_{t \in [0,T]}$ est-elle satisfaite par $(S_t^\gamma)_{t \in [0,T]}$?

On suppose désormais que l'option est un call de strike $K > 0$: $H = (S_T - K)^+$.

14. Pour $\alpha \in]0, +\infty[$, on définit $g_{\gamma,\alpha} :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^\gamma - \frac{\alpha \mathbb{E}^*[S_T^\gamma]}{\mathbb{E}^*[(S_T - K)^+]}(x - K)^+$.

    (a) Vérifier que $A_\alpha = \{g_{\gamma,\alpha}(S_T) \geq 0\}$ et $\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\alpha}\} = \{g_{\gamma,\alpha}(S_T) = 0\}$.

    (b) Lorsque $\gamma \leq 0$, vérifier que $g_{\gamma,\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ puis que l'équation $g_{\gamma,\alpha}(x) = 0$ admet une unique solution x_α dans $]0, +\infty[$ et que $x_\alpha \in]K, +\infty[$. Préciser $\{x > 0 : g_{\gamma,\alpha}(x) \geq 0\}$.

    (c) Lorsque $\gamma \in]0, 1[$, vérifier l'existence de $y \in [K, +\infty[$ tel que $g_{\gamma,\alpha}$ est strictement croissante sur $]0, y]$ puis strictement décroissante sur $[y, +\infty[$. En déduire que l'équation $g_{\gamma,\alpha}(x) = 0$ admet une unique solution x_α dans $]0, +\infty[$ et que $x_\alpha \in]y, +\infty[$. Préciser $\{x > 0 : g_{\gamma,\alpha}(x) \geq 0\}$.

    (d) Lorsque $\gamma = 1$, vérifier que soit $g_{\gamma,\alpha}$ est strictement croissante sur $]0, K]$ puis, suivant la valeur de α, soit croissante soit strictement décroissante sur $[K, +\infty[$ auquel cas l'équation $g_{\gamma,\alpha}(x) = 0$ admet une unique solution x_α dans $]0, +\infty[$ et $x_\alpha \in]K, +\infty[$. Préciser $\{x > 0 : g_{\gamma,\alpha}(x) \geq 0\}$ dans les deux cas.

    (e) Lorsque $\gamma > 1$, vérifier que l'équation $g_{\gamma,\alpha}(x) = 0$ admet au plus deux solutions dans $]0, +\infty[$.

    (f) Que vaut $\mathbb{P}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\alpha}\right)$? En déduire qu'il existe $\alpha_\star \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha_\star) = \beta$.

On suppose désormais $\gamma \leq 1$ et $\beta \in]0, 1[$.

15. Vérifier que $\alpha_\star > 0$ et $(S_T - K)^+ 1_{A_{\alpha_\star}} = \varphi_L(S_T)$ pour une valeur de L à préciser.

16. Vérifier que la probabilité historique (i.e. sous $\mathbb{P}$) que le call soit couvert sous la contrainte de budget est $\mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln(x_{\alpha_\star}/s_0) + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)T\right)\right)$ où $\mathcal{N}(y) = \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$.

17. Du point de vue de la couverture des risques, est-il satisfaisant que la valeur terminale du portefeuille soit nulle sur les scenarios qui conduisent aux plus grandes valeurs du payoff de l'option ?